ERRATA CORRIGE dell'Esercizio 6

Determinare i punti di estremo assoluto di

$$f(x,y) = 3y|x+y|$$

sul quadrato $Q = [-1,1] \times [-1,1]$.

Svolgimento. Passo 1: "elimino" il modulo. Considero i due triangoli

$$Q^+ = \{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1] \,:\, y \geq -x\}, \quad Q^- = \{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1] \,:\, y \leq -x\},$$

e osservo che $Q = Q^+ \cup Q^-$, che

$$(x,y) \in Q^+ \quad \Leftrightarrow \quad (-x,-y) \in Q^-$$

(cioè i due insiemi sono simmetrici rispetto a $(0,0)$), e, denotando con $f|_{Q^+}$ e $f|_{Q^-}$ le restrizioni di f a Q^+ e a Q^-, si ha che

$$f|_{Q^+}(x,y) = -f|_{Q^-}(-x,-y) \qquad \forall\,(x,y) \in Q^+. \tag{1}$$

Allora è sufficiente studiare i punti di estremo assoluto per $f|_{Q^+}$ e poi, tenendo conto di (1), dedurre risultati su tutto Q.

Ora si noti che

$$f|_{Q^+}(x,y) = 3y(x+y) = 3yx + 3y^2 \qquad \forall\,(x,y) \in Q^+,$$

il cui gradiente è il vettore $(3y, 3x+6y)$. Ricerco i punti stazionari interni a Q^+ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

da cui trovo che **l'unico punto stazionario per la funzione** $(x,y) \mapsto 3yx + 3y^2$ **è** $(0,0)$. Quindi **non vi è alcun punto stazionario interno a** Q^+**.**

Ricerco i punti di estremo assoluto per f su $\partial Q^+ = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, con

$$L_2 = \{(x,y) \in Q^+ \,:\, x = 1\}, \qquad L_3 = \{(x,y) \in Q^+ \,:\, y = 1\}.$$

Essendo f identicamente nulla su L_1 e strettamente positiva/strettamente negativa altrove, escludo di trovare dei punti di estremo assoluto su L_1. Considerazioni di segno mi portano a ricercare i punti di minimo assoluto su $L_2^- = L_2 = \{(x,y) \in Q^+ \,:\, x = 1,\ y \in [-1,0]\}$. Osserviamo che

- la restrizione di f a L_2 è

  $$h(y) = f(1,y) = 3y(1+y) = 3y + 3y^2, \qquad y \in [-1,1]$$

  il cui punto di minimo assoluto è $y = -\frac{1}{2} \in L_2^-$. Il corrispondente valore di minimo assoluto è $m = -\frac{3}{4}$; il punto di massimo assoluto è $y = 1$, e il corrispondente valore è $M = 6$.

- la restrizione di f a L_3 è

  $$j(x) = f(x,1) = 3(x+1) = 3x + 3, \qquad x \in [-1,1]$$

  il cui punto di minimo assoluto è $x = -1$, in cui la j si annulla ($f(-1,1) = 0$), mentre il punto di massimo assoluto è $x = 1$, e il corrispondente valore è $M = 6$.

Concludiamo che $(1,1)$ è il punto di massimo assoluto per f su Q^+ e che $(1,-\frac{1}{2})$ è il punto di minimo assoluto per f su Q^+.

Poiché, a causa di (1), $f(-1,-1) = -f(1,1) = -6$, concludiamo che il punto di minimo assoluto di f su Q è $(-1,-1)$, mentre $(1,1)$ è il punto di massimo assoluto di f su Q.
